Развитие творческого наследия Александра Михайловича Ляпунова учеными НТУ «ХПИ»

5. КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ, ОСНОВАННЫЙ НА АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ И СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Традиции преподавания теоретической механики в ХПИ, заложенные А. М. Ляпуновым и его учениками В. А. Стекловым и Н. Н. Салтыковым, продолжили их последователи. Среди них в первую очередь нужно отметить первого заведующего кафедрой теоретической механики, организованной в 1925 г., профессора И. М. Бабакова, о котором мы уже писали в 3-й главе. Он не только успешно развивал курсы теоретической и аналитической механики, но создал оригинальный курс теории колебаний. Иван Михайлович воспитал целую плеяду замечательных педагогов, среди которых можно выделить профессоров Л. И. Штейнвольфа и В. Н. Карабана, доцентов И. Л. Ланцевицкого, В. Ф. Грозу и В. И. Кравца, долгие годы работавших на кафедре теоретической механики и передававших свои знания молодежи.

Труд современного инженера-механика сейчас не представляется без применения персонального компьютера (ПК) и специальных пакетов программ для проведения инженерных расчетов. Многие специальные кафедры применяют в процессе обучения различные профессионально ориентированные пакеты программ. Однако преподавание общих дисциплин бакалаврского направления “инженерная механика” зачастую проводится по старинке, вообще без привлечения каких-либо компьютерных средств. Это создает разрыв между общими, фундаментальными и специальными дисциплинами, а также является тормозом в подготовке современных специалистов. Первой среди фундаментальных дисциплин инженерного образования является теоретическая механика, предшествующая изучению остальных дисциплин. Поскольку именно в этом предмете закладываются основы будущих специальных знаний, важно при его изучении сразу приобщить студентов широко использовать ПК и соответствующие программные средства. В НТУ «ХПИ» внедрен в учебную практику курс теоретической и аналитической механики, основанный на применении специального программного комплекса КИДИМ [1]. В основе комплекса лежит система компьютерной алгебры (СКА), позволяющая вводить исходные данные в формульном виде, вычислять их, дифференцировать, строить на этой основе уравнения. Система позволяет также выводить результаты в виде уравнений, записанных в обычной дифференциальной форме, анализировать их решения, строить таблицы и графики, сформировать отчет.

Программный комплекс КИДИМ создавался с 1980-х годов на кафедре теоретической механики ХПИ под руководством профессора Л. И. Штейнвольфа (1916–1991) и предназначался для научных исследований [2–5]. Он позволяет рассматривать модели дискретных механических систем произвольной структуры с неголономными и нестационарными связями, в том числе и совершающих пространственные движения, провести их кинематические исследования, построить дифференциальные уравнения динамики и численно проинтегрировать их [6–9]. Особенностью комплекса является то, что для всех видов расчетов строится единая модель, позволяющая оперативно менять не только ее параметры, но и структуру системы. Встроенные в комплекс сервисные программы позволяют частично автоматизировать процесс подготовки исходных данных.

Именно по инициативе Л. И. Штейнвольфа комплекс КИДИМ был впервые применен при изложении курсов теоретической механики и динамики машин для студентов специальности «Динамика и прочность машин» инженерно-физического факультета ХПИ. В конце 1990-х годов доцентом Ю. М. Андреевым новый курс механики, основанный на аналитических методах и применении системы компьютерной алгебры КИДИМ, внедрен на механико-технологическом факультете. С 1998 г. этот курс постепенно вводится и на других факультетах НТУ «ХПИ». Строгое теоретическое обоснование такого курса и компьютерного практикума, его отличие от традиционных излагается в данной главе.

Особенностью данного курса является то, что изложение разделов кинематики и кинетики строится с единых позиций. В основе лежат понятия обобщенных координат и структур, под которыми понимаются зависимости координат точек приложения сил, центров масс тел и их углы поворота от обобщенных координат. Прямое аналитическое дифференцирование по времени структуры системы дает возможность определить скорости, ускорения и траектории всех необходимых точек механизма, а также угловые скорости и ускорения всех его звеньев, т.е. решить основную задачу кинематики. В основу автоматического составления дифференциальных уравнений движения механических систем положено общее вариационное уравнение динамики (принцип д'Аламбера – Лагранжа). Для его записи кроме структур нужно задать инерционные характеристики модели и силовые факторы, которые могут быть функциями времени, положений или скоростей. Обобщенные активные силы и обобщенные силы инерции определяются путем приведения силовых факторов к обобщенным координатам.

Традиционное изложение курса, принятое в классических учебниках, начинается с изложения статики. При этом приходится вводить некоторые аксиомы в статике, которые носят временный характер, так как они вытекают из законов динамики. Это вызывает некоторые повторы в изложении курса и его фрагментацию. Основные же принципы механики (виртуальных перемещений, общее вариационное уравнение динамики) и уравнения Лагранжа II рода рассматриваются только в самом конце курса и не усваиваются студентами. Порядок изложения предложенного курса теоретической механики состоит в следующем. Сначала излагается курс кинематики, отличие которого от традиционного заключается в использовании понятий обобщенных координат и числа степеней свободы движущихся точек, тел и механизмов. Затем читается кинетика, изложение которой начинается с классификации связей, после чего вводятся понятия действительных, возможных и виртуальных перемещений и уточняются понятия числа степеней свободы и обобщенных координат.

Только после этого вводится понятие силы и излагаются аксиомы механики – три закона Ньютона, принцип независимости действия сил из которого следует правило параллелограмма сил и аксиома освобождаемости от связей. Затем силы разделяются на активные и реактивные, поясняется понятия элементарной и виртуальной работы, вводятся постулат идеальных связей и понятие силы инерции д'Аламбера. В итоге формулируется ***принцип д'Аламбера – Лагранжа*** как объединение указанных аксиом. Дальнейшее изложение основных положений курса ведется на базе этого принципа. Из него выводится принцип виртуальных перемещений и принцип эквивалентности систем сил, приложенных к механической системе. На основе последнего доказываются все положения статики твердого тела. Также на базе принципа д'Аламбера – Лагранжа доказываются общие теоремы динамики, причем формулируются они, как с учетом, так и без учета сил реакций идеальных связей. Остановимся кратко на выводе перечисленных теоретических положений.

Принцип д'Аламбера – Лагранжа

Рассмотрим механическую систему с идеальными связями, реакции которых $\vec{R}_i$, приложены к ее точкам с радиус-векторами $\vec{r}_i$, $i = 1, 2, ..., N$, где N - число точек. Тогда суммарная работа этих реакций на любых виртуальных перемещениях системы равна нулю

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0 . \tag{5.1}$$

Пусть, кроме реактивных на каждую точку действуют активные силы. Тогда по принципу освобождаемости от связей, второму закону Ньютона и принципу параллелограмма сил, запишем

$$\vec{R}_i = m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i , \tag{5.2}$$

откуда получается

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0 , \tag{5.3}$$

где $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$ – ***д'Аламберова сила инерции.*** Равенство (5.3) выражает ***принцип д'Аламбера***, который можно сформулировать следующим образом:

При движении механической системы в каждый момент времени приложенные к каждой ее точке активные силы, силы реакций связей и силы инерции образуют уравновешенную систему сил.

После подстановки (5.2) в (5.1) получим ***принцип д'Аламбера – Лагранжа***

$$\sum_{i=0}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right)\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i\right)\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N}\vec{\Phi}_i\delta\vec{r}_i = 0\ , \qquad (5.4)$$

который также носит название ***общего уравнения динамики*** и формулируется следующим образом:

При движении механической системы с идеальными и удерживающими связями в каждый момент времени сумма работ активных сил и сил инерции ее точек на любом виртуальном перемещении равна нулю.

Если механическая система находится в покое, то д'Аламберовы силы инерции всех точек равны нулю, поэтому выражение (5.4) приобретает вид

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\delta\vec{r}_i = 0\ . \qquad (5.5)$$

Это выражает ***принцип виртуальных перемещений*** (***принцип Лагранжа***)

Для равновесия механической системы с идеальными, стационарными, голономными и удерживающими связями при нулевых начальных скоростях ее точек необходимо и достаточно, чтобы сумма работ активных сил на любом виртуальном перемещении была равна нулю.

Так как (5.5) есть следствие (5.4), то последнее часто называют также ***общим уравнением механики***.

Принцип эквивалентности систем сил, приложенных к механической системе.

Запишем уравнение (5.4) в обобщенных координатах, т.е. подставим сюда $\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k$, где s – число степеней свободы, $q_1, q_2,..., q_s$ - обобщенные координаты и, перегруппировывая слагаемые, получим

$$\sum_{k=1}^{s} \left(Q_k^a + Q_k^i\right)\delta q_k = 0 , \tag{5.6}$$

где

$$Q_k^a = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} , \tag{5.7}$$

$$\vec{R}_i = m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i , \tag{5.2}$$

$$Q_k^i = -\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} , \quad k = 1,2,..., s , \tag{5.8}$$

соответственно, обобщенные силы - активные и инерции. Если рассматривать голономные системы, то вариации обобщенных координат δq_k независимы и из (5.6) получим систему s уравнений движения

$$- Q_j^i = Q_j^a , \quad j = 1,2,\dots,s . \tag{5.9}$$

Система уравнений (5.9) есть система s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени. Это следует из равенств (5.7), (5.8) и того факта, что силы в общем случае могут зависеть от времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей, т.е.

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i\left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t\right) = \vec{F}_i\left(q_1, q_2,..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2,..., \dot{q}_s, t\right) ,$$

а ускорения точек – от обобщенных координат, обобщенных скоростей, обобщенных ускорений и времени

$$\vec{a}_i = \dot{\vec{v}}_i = \ddot{\vec{r}}_i = \vec{a}_i\left(q_1, q_2,..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2,..., \dot{q}_s, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2,..., \ddot{q}_s, t\right) .$$

Согласно основным теоремам математического анализа, эта система, при задании $2s$ начальных условий и удовлетворении некоторых других условий, обычно выполненных для механических систем, имеет единственное решение $q_k = q_k(t),\ \dot{q}_k = \dot{q}_k(t)$. Начальными условиями считаются значения s обобщенных координат и s их скоростей в некоторый момент времени, принимаемый за начальный $(t = 0)$: $q_k\big|_{t=0} = q_{k0},\ \dot{q}_k\big|_{t=0} = \dot{q}_{k0}$, ($k = 1,2,..., s$).

Отсюда следует, что, если вместо системы активных сил $\vec{F}_i$, $i = 1,2,..., N$, дающих s обобщенных сил Q_k^a взять другую систему сил $\tilde{\vec{F}}_i$, $i = 1,2,..., N$, такую, что ее обобщенные силы будут такими же (это всегда можно обеспечить, если $N > s$), то система дифференциальных уравнений (5.9) будет такой же. Значит, при тех же начальных условиях и решение у нее будет таким же. То есть механическая система будет вести себя точно так же, как и при действии на нее исходной системы сил. Итак,

Системы сил ***эквивалентны по действию*** *на данную механическую систему, если для выбранной системы обобщенных координат у них* ***одинаковые обобщенные силы****.*

Запишем выражение виртуальной работы активных сил системы

$$\delta A^a = \sum_{k=1}^{s} Q_k^a \delta q_k .$$

Так как при замене активных сил эквивалентной системой все коэффициенты в этом выражении (обобщенные силы системы) сохраняются, то можно переформулировать определение эквивалентности следующим образом

Системы сил ***эквивалентны по действию*** *на данную механическую систему, если на одинаковых виртуальных перемещениях они дают* ***одинаковые виртуальные работы****.*

Статика твердого тела.

При рассмотрении задач статики все обобщенные силы инерции равны 0 и из (5.9) получается s уравнений равновесия системы в обобщенных координатах

$$Q_j^a = 0, \quad j = 1,2,\dots, s . \tag{5.10}$$

Сформулированный принцип эквивалентности позволяет легко решить все задачи о равновесии твердого тела и систем твердых тел. При стационарных связях виртуальные перемещения совпадают с возможными. В качестве вариаций обобщенных координат можно выбрать вариации координат полюса $\vec{r}_O$ и вариации углов Эйлера $\delta\vec{\alpha} = \{\delta\varphi, \delta\theta, \delta\psi\}$, последние с точностью до величин второго порядка малости совпадают с вариациями углов поворота тела вокруг координатных осей (углов Эйлера-Крылова) $\delta\varphi_O = \{\delta\varphi_x, \delta\varphi_y, \delta\varphi_z\}$. Поэтому возможное перемещение точки приложения каждой силы $\vec{F}_i$ составляет $\delta\vec{r}_i = \delta\vec{r}_O + \delta\vec{\varphi}_O \times \vec{r}_i$ и возможная работа, приравненная нулю, запишется

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i(\delta\vec{r}_O + \delta\vec{\varphi}_O \times \vec{r}_i) = \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\right)\delta\vec{r}_O + \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)\right)\delta\vec{\varphi}_O = 0 . \qquad (5.11)$$

Величины $\vec{R} = \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\right)$ и $\vec{M}_O = \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)\right)$ называются ***главным вектором*** и ***главным моментом*** системы сил. Таким образом, из (5.11) следуют условия равновесия твердого тела $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_O = 0$ и тот факт, что системы сил, приложенных к твердому телу, эквивалентны, если у них одинаковы главный вектор и главный момент. Из принципа возможных перемещений установим, что сила - скользящий вектор; пары равны, если равны их моменты. Две пары эквивалентны одной, момент которой равен сумме моментов пар и правило сложения параллельных сил

Таким образом, возвращаясь к (5.11), любая система сил, приложенная к твердому телу, эквивалентна совокупности силы - **главного вектора** и пары - **главного момента.**

Из принципа возможных перемещений доказывается также теорема Вариньона и определяются координаты центра тяжести.

Уравнения Лагранжа II рода и общие теоремы динамики.

Уравнения Лагранжа II рода непосредственно выводятся традиционным способом из уравнений (5.9) путем выражения обобщенных сил инерции через кинетическую энергию с использованием двух тождеств

Лагранжа (см., например, [10]).

В заключение курса формулируются и доказываются общие теоремы динамики. В предлагаемом подходе доказательство их однотипно и лаконично, так как сводится к выбору соответствующего виртуального перемещения, кроме того, так как рассуждения проводятся на языке виртуальных перемещений, более прозрачным становится вопрос о существовании той или иной теоремы для конкретной механической системы, того или иного закона сохранения. В связи с этим несколько меняются формулировки этих теорем. В двух первых теоремах следует различать два случая, обусловленные тем, допускает ли система соответствующее перемещение, или нет. Если допускает, то в формулировке ее будут отсутствовать реакции идеальных связей.

1. Теорема импульсов.

Если связи допускают поступательное перемещение механической системы как целого вдоль некоторого направления, то

- производная по времени от проекции главного вектора количества движения системы на эту прямую равна проекции главного вектора активных внешних сил на это направление

- проекция ускорения центра масс системы на это направление прямо пропорционально проекции главного вектора активных внешних сил на это направление и обратно пропорционально массе системы.

Даем системе поступательное виртуальное перемещение $\delta\vec{r}_i = \delta\vec{r} = \delta r \cdot \vec{e}$, где $\vec{e}$ - орт прямой, вдоль которого допускается такое перемещение. Имеем из (5.4)

$$\delta A = \left[\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right)\right]\delta r \cdot \vec{e} = 0 \text{, т.е. } \vec{e}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \vec{e}M\vec{a}_C = \frac{d}{dt}\left(\vec{e}\vec{K}\right) = \vec{e}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i ,$$

где $\vec{K} = M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$ - вектор количества движения, M - масса, $\vec{a}_C$ - ускорение центра масс системы. Окончательно, получим формулировку скалярной формы теоремы

$$Ma_{Ce} = \frac{dK_e}{dt} = \sum_{i=1}^{N} F_{ie}$$

Если система не имеет возможности для поступательного перемещения, то ее можно «освободить» от связей и дать виртуальное *поступательное* перемещение вместе с центром масс $\delta\vec{r}_C$. Запишем общее уравнение механики, куда войдут внешние и внутренние активные и реактивные силы, затем уберем равную нулю сумму внутренних активных и реактивных сил. Получим из (5.4),

$$\delta A = \left[\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{\,E} + \vec{F}_i^{\,I} + \vec{R}_i^{\,I} + \vec{R}_i^{\,E} - m_i\vec{a}_i\right)\right]\delta\vec{r}_C = \left[\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{\,E} + \vec{R}_i^{\,E} - m_i\vec{a}_i\right)\right]\delta\vec{r}_C = 0 \ ,$$

где $\vec{F}_i^{\,E}$ - внешние силы системы, $\vec{F}_i^{\,I}$ - внутренние силы системы, $\vec{R}_i^{\,E}$, $\vec{R}_i^{\,I}$ - реакции внешних и внутренних связей. Так как вектор $\delta\vec{r}_C$ может быть любым по направлению и не равен нулю, то записанное скалярное произведение равно нулю может быть только тогда, когда выражение в квадратных скобках будет равно нулю. То есть

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,E} + \sum_{i=1}^{N}\vec{R}_i^{\,E} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = M\vec{a}_C = \frac{d\vec{K}}{dt}$$

Это векторная форма теоремы:

Центр масс механической системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и приложен главный вектор внешних сил.

Скорость изменения главного вектора количества движения системы равна главному вектору всех внешних сил.

2. Теорема моментов.

Если связи допускают вращательное перемещение механической системы как целого вокруг некоторой оси, то производная по времени от проекции кинетического момента системы на эту ось равна проекции главного момента системы внешних активных сил на эту ось.

Воспользуемся формулой Эйлера для перемещений каждой точки при вращательном виртуальном перемещении системы на некоторый угол $\delta\varphi$ вокруг оси, орт которой обозначим $\vec{e}$ - $\delta\vec{r}_i = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i = \delta\varphi \cdot \vec{e} \times \vec{r}_i$. Тогда из (5.4) имеем

$$\delta A = \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i \right) \right] \cdot (\delta\varphi \cdot \vec{e} \times \vec{r}_i) = 0 ,$$

откуда, переставляя сомножители в смешанном произведении и сокращая на $\delta\varphi$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{e} \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \right) = \frac{d}{dt} L_e = \vec{e} \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{N} M_e(\vec{F}_i) .$$

В случае, когда связи не допускают такого перемещения, поступаем, как в предыдущей теореме – «освобождаем» систему от связей, даем виртуальное перемещение путем поворота системы на некоторый угол $\delta\vec{\varphi}$. Получим из (5.4) с учетом равенства нулю главного момента внутренних сил

$$\left[\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{\,E} + \vec{F}_i^{\,I} + \vec{R}_i^{\,I} + \vec{R}_i^{\,E} - m_i \vec{a}_i \right) \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) \right] =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,E} + \vec{r}_i \times \vec{R}_i^{\,E} - \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right) \right) \right] \delta\vec{\varphi} = 0 .$$

Это может быть с учетом произвольности $\delta\vec{\varphi}$ только тогда, когда

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{\,E} \right) + \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_O\left(\vec{R}_i^{\,E} \right).$$

Таким образом, для несвободной механической системы

Скорость изменения кинетического момента системы равна главному моменту внешних сил с учетом реакций связей.

3. Теорема об изменении кинетической энергии.

Если идеальные связи, наложенные на систему, не зависят от времени, то дифференциал кинетической энергии системы равен *сумме элементарных работ на действительных перемещениях всех внешних и внутренних сил.*

Так как действительное перемещение это одно из возможных, а для стационарных связей виртуальные перемещения совпадают с возможными, поэтому имеем $\delta\vec{r}_i = d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$. Тогда (5.4) получит вид $dA = \left[\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)\right]\cdot d\vec{r}_i = 0$, поэтому

$$d\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i\right).$$

Для всех перечисленных теорем рассматриваются следствия – законы сохранения движения центра масс, главного вектора количества движения, главного момента, энергии системы.

Таким образом, изложение курса теоретической механики становится более компактным, стройным, строгим, дающим современное представление студентам о механике.

Описание и алгоритмы решения основных задач курса теоретической механики с помощью СКА КИДИМ.

Алгоритмы решения задач, реализованные в программном комплексе КИДИМ, основываются на фундаментальных понятиях теоретической механики – степенях свободы механической системы, обобщенных координатах, принципах д'Аламбера – Лагранжа и виртуальных перемещений. Подготовка исходных данных для решения задач с помощью комплекса КИДИМ требует от студента и развивает у него хорошую аналитическую подготовку, математическую строгость и формирует более углубленное, чем в обычных курсах, понимание перечисленных фундаментальных понятий.

1. Решение основной задачи кинематики.

Основная задача кинематики заключается в определении скоростей и ускорений точек, а также угловых скоростей и ускорений тел механической системы (механизма) по заданному ее движению. Движение задается законами изменения обобщенных координат от времени на заданном интервале. Характеристики положения точек и тел механической системы определяются аналитическими выражениями их координат от обобщенных. Эти выражения называются ***геометрическими структурами*** или просто ***структурами***. Могут также использоваться зависимости скоростей точек или угловых скоростей тел от обобщенных координат и скоростей. Такие выражения будем называть ***дифференциальными (кинематическими) структурами***.

Решение основной задачи кинематики механических систем, поэтому, требует простого дифференцирования таких структур по времени. Получаемые в результате выражения могут оказаться громоздкими и весьма сложными для их формирования и расчета вручную. Предпочтительнее вычислять их с привлечением программных средств ПК. Поэтому здесь оправдано применение СКА КИДИМ.

2. Решение основной задачи статики (определение реакций связей).

В основе алгоритмов решения задач статики в программном комплексе КИДИМ лежит принцип виртуальных перемещений (5.5). Обозначим: s – число степеней свободы механической системы; $q_1, q_2, ..., q_s$ – совокупность обобщенных координат; $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ – совокупность их вариаций, задающих виртуальное перемещение; N – число активных сил $\vec{F}_i = \{F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}\}$, приложенных к точкам системы, положение которых в декартовой системе координат определяется радиус-векторами $\vec{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$, $i = 1, 2, ..., N$. Значение этих радиус-векторов полностью определяется величинами обобщенных координат – геометрическими структурами $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_s)$. Представим обобщенные силы, входящие в уравнения равновесия (5.10) и вычисляемые по формулам (5.7), формулами через координаты входящих туда сил и радиус-векторов их точек приложения

$$Q_k^a = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \tag{5.12}$$

Откуда видно, что для формирования уравнений равновесия достаточно задать силы своими проекциями на оси декартовой системы координат и выражениями координат их точек приложения через обобщенные координаты. Преобразование уравнений (5.10) к виду, который используется в программном комплексе КИДИМ для решения задач статики, обусловлено наличием в таких задачах, наряду с силами, пар сил. Последние удобнее представлять не двумя (тремя для пространственной системы) проекциями сил и координатами их точек приложения, а моментом пары и углом поворота тела под действием этой пары в функции обобщенных координат (это тоже геометрическая структура). Такое задание сил и пар системы будем называть ***силовой структурой*** механической системы. Оно обеспечивает автоматическое (программное) формирование выражения виртуальных работ сил и пар и дает возможность без участия человека построить уравнения равновесия на основе принципа виртуальных перемещений. Указанная информация о силах и парах задается в программном комплексе КИДИМ ***силовыми элементами***, совокупность которых и формирует силовую структуру. Будем понимать под ***силовым элементом*** совокупность ***имени, характеристики, координаты*** и ***структуры.***

Для того, чтобы иметь возможность построить и виртуальную работу сил системы на любом виртуальном перемещении и обобщенную силу для уравнений равновесия, заметим, что силы можно задать совокупностью проекций на независимые виртуальные перемещения их точек приложения, а сами виртуальные перемещения - параметрами, вариации которых задают эти виртуальные перемещения. Так в (5.12) это будут проекции силы на оси декартовой системы координат и декартовые координаты ее точки приложения. Аналогично, пару сил можно задать проекцией ее момента на некоторую ось и углом поворота тела округ этой оси. Тогда указанные проекции сил и моментов пар будут *характеристиками* силовых элементов, а декартовые координаты точек приложения сил и углы поворота – их *координатами*. Зависимости координат силовых элементов от обобщенных координат системы и будут являться их *структурами*.

Совокупность силовых элементов силовой структуры механической модели системы позволяет получить выражение суммы виртуальных работ сил и пар как сумму произведений характеристик на вариации координат силовых элементов.

Введем системы координат (см. рис. 5.1): $OXYZ$ – абсолютная система координат; $Oxyz$ – система координат, жестко связанная с телом, начало которой – точка O – произвольная фиксированная точка твердого тела, которую в кинематике принято называть ***полюсом***, а в статике – ***центром приведения***.

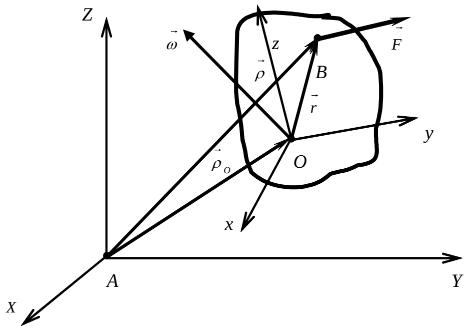

Рис. 5.1

Положение произвольной точки свободного твердого тела M можно представить в виде

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_O + \vec{r} , \tag{5.13}$$

где $\vec{\rho}_O$ - радиус-вектор полюса, $\vec{r}$ – вектор, задающий положение точки B относительно полюса. Возьмем производную от левой и правой частей равенства (5.13), получим

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} , \tag{5.14}$$

где $\vec{\omega}$ – угловая скорость тела при сферическом движении относительно полюса O . Умножим левую и правую часть равенства (5.14) на dt

$$d\vec{\rho} = d\vec{\rho}_O + \vec{\omega} dt \times \vec{r} .$$

Введем величину $d\vec{\varphi} = \vec{\omega} dt$ – вектор элементарного поворота тела за промежуток времени dt . Модуль этого вектора равен углу $d\varphi$ поворота вокруг мгновенной оси вращения, направление совпадает с направлением угловой скорости поворота $\vec{\omega}$. Учитывая, что для свободного твердого тела, как для системы со стационарными связями, действительное элементарное перемещение совпадает с одним из виртуальных, перепишем это в вариациях

$$\delta\vec{\rho} = \delta\vec{\rho}_O + \delta\vec{\varphi}\times\vec{r}\,.$$

Определим виртуальную работу силы $\vec{F}$ на таком перемещении $\delta\rho_i$

$$\delta A = \vec{F}\delta\vec{\rho} = \vec{F}\delta\vec{\rho}_O + \vec{F}(\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}) = \vec{F}\delta\vec{\rho}_O + \left(\vec{r}\times\vec{F}\right)\delta\vec{\varphi}$$

или

$$\delta A = \vec{F}\delta\vec{\rho}_O + \vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\delta\vec{\varphi} \qquad (5.15)$$

где $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \left(\vec{r}\times\vec{F}\right)$ – момент силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Как видно из выражения (5.15), виртуальная работа силы $\vec{F}$, приложенной в точке B к свободному твердому телу, равна работе этой силы на поступательном перемещении тела вместе с полюсом O и работе ее при повороте тела вокруг полюса. Найдем слагаемые в выражении (5.15), подставив проекции векторов виртуальных перемещений и приложенной силы

$$\vec{F} = \left\{F_x,\,F_y,\,F_z\right\},\quad \delta\vec{\rho}_O = \left\{\delta x_O,\,\delta y_O,\,\delta z_O\right\},\quad \delta\vec{\varphi} = \left\{\delta\varphi_x,\,\delta\varphi_y,\,\delta\varphi_z\right\}.$$

Получим

$$\vec{F}\delta\vec{\rho}_O = F_x\delta x_O + F_y\delta y_O + F_z\delta z_O$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\delta\vec{\varphi} = \left(\vec{r}\times\vec{F}\right)\delta\vec{\varphi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}\delta\vec{\varphi} =$$

$$= \left(yF_z - zF_y\right)\delta\varphi_x + \left(zF_x - xF_z\right)\delta\varphi_y + \left(xF_y - yF_x\right)\delta\varphi_z$$

Тогда виртуальная работа (5.15) может быть записана

$$\delta A_F = F_x\left(\delta x_O + z\delta\varphi_y - y\delta\varphi_z\right) +$$
$$+ F_y\left(\delta y_O + x\delta\varphi_z - z\delta\varphi_x\right) + F_z\left(\delta z_O + y\delta\varphi_x - x\delta\varphi_y\right) \qquad (5.16)$$

Выражение (5.16) позволяет представить силу $\vec{F}$ при помощи трех силовых элементов, соответствующих каждому слагаемому. Однако, по-разному группируя слагаемые в правой части выражения (5.16), силу можно представить также в виде другого числа силовых элементов – одного (вынося за скобки модуль силы $\vec{F}$) или шести (по числу составляющих вариаций)

$$\delta A_F = F\ [(\delta x_O + z\delta\varphi_y - y\delta\varphi_z)\cos(\vec{F},\vec{i}) + (\delta y_O + x\delta\varphi_z - z\delta\varphi_x)\cos(\vec{F},\vec{j}) +$$
$$+ (\delta z_O + y\delta\varphi_x - x\delta\varphi_y)\cos(\vec{F},\vec{k})] \qquad (5.17)$$

или

$$\begin{gathered}\delta A_F = F_x\delta x_O + (yF_z - zF_y)\delta\varphi_x + F_y\delta y_O + (zF_x - xF_z)\delta\varphi_y + \\ F_z\delta z_O + (xF_y - yF_x)\delta\varphi_z\end{gathered} \qquad (5.18)$$

Для плоской системы сил $F_z \equiv 0,\ \delta\varphi_x \equiv 0,\ \delta\varphi_y \equiv 0,\ \delta z \equiv 0$. За обобщенные координаты следует взять $\mathbf{q} = \{x_O, y_O, \varphi_O\}$ с вариацией $\delta\mathbf{q} = \{\delta x_O, \delta y_O, \delta\varphi_O\}$.

Тогда равенства (5.16), (5.17) и (5.18) примут вид

$$\delta A_F = F[(\delta x_O - y\delta\varphi)\cos(\vec{F},\vec{i}) + (\delta y_O + x\delta\varphi)\cos(\vec{F},\vec{j})],$$

$$\delta A_F = F_x(\delta x_O - y\delta\varphi) + F_y(\delta y_O + x\delta\varphi), \qquad (5.19)$$

$$\delta A_F = F_x\delta x_O + F_y\delta y_O + (xF_y - yF_x)\delta\varphi \qquad (5.20)$$

Выражение (5.19) дает возможность представить силу плоской системы совокупностью двух силовых элементов с характеристиками $\{F_x,\ F_y\}$ и структурами $\{\delta x, \delta y\}$, определяемыми по формулам:

$$\delta x = \delta x_O - y\delta\varphi\ , \qquad \delta y = \delta y_O + x\delta\varphi\ ,$$

где $x,\ y$ – координаты точки приложения силы.

Если вектор силы направлен горизонтально или вертикально, то потребуется один силовой элемент с характеристикой – проекцией силы на горизонталь и вертикаль, соответственно, структурой:

для горизонтальной силы $\delta x = \delta x_O - y\delta\varphi$,

для вертикальной $\delta y = \delta y_O + x\delta\varphi$.

Выражение (5.20) можно переписать в виде

$$\delta A_F = M_O\left(\vec{F}_x\right)\delta\varphi + M_O\left(\vec{F}_y\right)\delta\varphi + F_x\delta x_O + F_y\delta y_O =$$
$$= M_O\left(\vec{F}\right)\delta\varphi + F_x\delta x_O + F_y\delta y_O \qquad (5.21)$$

Выражение (5.21) представляет любую силу плоской системы как совокупность ***четырех*** силовых элементов с характеристиками $\left\{ F_y x,\ - F_x y,\ F_x,\ F_y \right\}$ и структурами $\{\delta\varphi,\ \delta\varphi,\ \delta x_O,\ \delta y_O\}$ или как совокупность ***трех*** силовых элементов с характеристиками $\left\{ F_y x,\ - F_x y,\ F_x,\ F_y \right\}$ и структурами $\{\delta\varphi,\ \delta x_O,\ \delta y_O\}$.

Для силовых элементов, описывающих пары плоской системы сил, ввиду того, что виртуальная работа пары определяется только ее моментом M и углом поворота $\delta\varphi$

$$\delta A = M\delta\varphi$$

координатой будет угол поворота φ с вариацией $\delta\varphi$, а характеристикой – алгебраическое значение момента пары M . Знак момента определяется в зависимости от направления ее действия: против часовой стрелки – "+", по часовой стрелке – "-".

Таким образом, любую совокупность сил, образующих пространственную или плоскую систему, по формулам (5.16)-(5.21) можно представить в виде совокупности различного числа силовых элементов, что позволит задачу составления уравнений равновесия такой системы свести к формальным операциям с этими силовыми элементами.

Обозначим через p – число силовых элементов; $P_1, P_2, \ldots, P_p$ – их характеристики; $\rho_1(q_1, q_2, \ldots, q_s)$, $\rho_2(q_1, q_2, \ldots, q_s)$, …, $\rho_p(q_1, q_2, \ldots, q_s)$ – их координаты и структуры. Определим виртуальную работу сил и пар системы:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{p} \delta A_{F_i} = \sum_{i=1}^{p} P_i \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^{s} \delta q_k \sum_{i=1}^{p} P_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} = 0 \qquad (5.22)$$

откуда следуют s уравнений равновесия - все обобщенные силы должны быть равны нулю

$$Q_k = \sum_{i=1}^{p} P_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} = 0 \,, \quad k = 1,2,..., s. \qquad (5.23)$$

Таким образом, алгоритм программного построения k-го уравнения равновесия состоит в суммировании произведений характеристик силовых элементов на частные производные их структур по k -й обобщенной координате. Уравнения равновесия (5.23) эквивалентны уравнениям (5.7) и (5.9). Отличие состоит в том, что в уравнениях (5.7) и (5.9) используются векторные величины, а в уравнениях (5.23) – скалярные. В уравнениях (5.23) $\{\vec{F}_i\}$– векторы сил и $\{\vec{r}_i\}$ – радиус-векторы их точек приложения, а в уравнениях (5.7) и (5.9) $\{P_i\}$ – характеристики силовых элементов – проекции сил или моментов, а $\{\rho_i\}$ – координаты силовых элементов – декартовы координаты точек приложения сил или углы поворота тела.

Если $\{P_i\}$ - составляющие известных сил, то это система уравнений (вообще говоря, нелинейная) для определения положения равновесия $\{q_{10}, q_{20}, ..., q_{s0}\}$, так как элементы производных $\frac{\partial \rho_i}{\partial q_k}$ от обобщенных координат. Если $\{P_i\}$ содержит, кроме известных активных сил, неизвестные силы реакций, переведенные в разряд активных применением принципа освобождаемости от связей, то это - обычные уравнения статики для нахождения реакций (или активных сил, обеспечивающих равновесие), причем - линейные относительно этих неизвестных. Число неизвестных в них должно быть равно числу степеней свободы системы, т.е. s .

3. Составление уравнений движения механических систем

В основу алгоритмов составления **уравнений движения** механических систем в программном комплексе КИДИМ положен наиболее фундаментальный из принципов аналитической механики – принцип д’Аламбера – Лагранжа (общее вариационное уравнение динамики) (5.4).

Преобразуем уравнения (5.9) к виду, используемому в программном комплексе КИДИМ для решения задач динамики аналогично тому, как это было сделано в случае решения задач статики (5.22) – (5.23).

Во-первых, силовую структуру системы, как было показано выше, удобно задать с помощью ***силовых элементов***. Во-вторых, для того, чтобы ***инерционную структуру*** также можно было задать совокупностью ***инерционных элементов***, объединяющих ***имя, характеристику, координату*** и ***структуру,*** воспользуемся тем обстоятельством, что для голономных систем инерционные свойства полностью описываются кинетической энергией, а для неголономных – функцией Аппеля [11]. Выражения для кинетической энергии при движениях:

поступательном $T = 0{,}5m\left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2\right)$,

вращательном $T = 0{,}5J\dot{\varphi}^2$,

плоскопараллельном $T = 0{,}5\left[m\left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + J\dot{\varphi}^2\right)\right]$

позволяют представить инерционную структуру совокупностью инерционных элементов. При этом роль характеристик выполняют масса тела m и осевой момент инерции J, а координат - декартовые координаты центра масс x_C, y_C, z_C и угол поворота тела φ. В случае произвольного движения тела требуемый для наших целей вид кинетическая энергия приобретает при выражении ее вращательной части через квазискорости – проекции вектора угловой скорости тела на его главные центральные оси инерции $C\xi\eta\zeta$

$$T = 0{,}5\left[m\left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2\right) + J_\xi\omega_\xi^2 + J_\eta\omega_\eta^2 + J_\zeta\omega_\zeta^2\right].$$

В этом случае надо рассматривать в качестве характеристик инерционных элементов, задающих вращательную часть инертности тела, его моменты инерции относительно главных центральных осей инерции, а в качестве координат и структур – квазискорости и дифференциальные структуры

$$\omega_\xi = \omega_\xi(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot q_1, \dot q_2, \dots, \dot q_s),$$
$$\omega_\eta = \omega_\eta(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot q_1, \dot q_2, \dots, \dot q_s), \qquad (5.24)$$
$$\omega_\zeta = \omega_\zeta(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot q_1, \dot q_2, \dots, \dot q_s).$$

Здесь $q_1, q_2, \dots, q_s, \dot q_1, \dot q_2, \dots, \dot q_s$ - обобщенные координаты и обобщенные скорости системы. Впрочем, роль последних могут играть и квазискорости, что тем более удобно для неголономных систем. Тогда (5.24) следует записать в виде

$$\omega_\xi = \omega_\xi(q_1, q_2, \dots, q_s, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l),$$
$$\omega_\eta = \omega_\eta(q_1, q_2, \dots, q_s, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l),$$
$$\omega_\zeta = \omega_\zeta(q_1, q_2, \dots, q_s, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l),$$

где $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l$ - квазискорости, число которых может быть меньше числа обобщенных скоростей.

Такое задание инерционной структуры механической системы позволяет правильно построить функцию Аппеля с учетом неголономных связей в виде [8]

$$S = 0{,}5\left[m\left(\ddot x_C^2 + \ddot y_C^2 + \ddot z_C^2\right) + J_\xi \dot\omega_\xi^2 + J_\eta \dot\omega_\eta^2 + J_\zeta \dot\omega_\zeta^2\right] +$$
$$+ J_\xi \dot\omega_\xi \omega_\eta \omega_\zeta \left(J_\zeta - J_\eta\right) + J_\eta \dot\omega_\eta \omega_\xi \omega_\zeta \left(J_\xi - J_\zeta\right) + J_\zeta \dot\omega_\zeta \omega_\xi \omega_\eta \left(J_\eta - J_\xi\right).$$

Силы инерции тел механической системы следует привести к центру масс каждого твердого тела системы. Получим главный вектор сил инерции i -го тела

$$\vec\Phi_i^j = -m_i \ddot{\vec r}_{C_i}$$

и главный момент сил инерции его

$$\vec M_i^j = -\left\{\left[\vec J_i\right] \cdot \vec\varepsilon_i^{(i)} + \vec\omega_i^{(i)} \times \left[\vec J_i\right] \cdot \vec\omega_i^{(i)}\right\}.$$

Здесь для i -го тела: $\vec r_{C_i}$ - радиус-вектор центра масс, m_i – масса, $\vec\omega_i^{(i)}, \vec\varepsilon_i^{(i)} = \dot{\vec\omega}_i^{(i)}$ - векторы угловой скорости и углового ускорения, заданные в его главной центральной системе координат, $[J_i]$ -

диагональная матрица, содержащая главные центральные моменты инерции i -го тела J_ξ, J_η, J_ζ .

Теперь приведем эти векторы к обобщенным координатам механической системы, получим вектор обобщенных сил инерции системы, порождаемый инерционностью i -го тела

$$-\mathbf{Q}_i^j = \left[\frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T m_i \ddot{\vec{r}}_{C_i} + \left[\frac{\partial \vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]^T \left(\left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\varepsilon}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\omega}_i^{(i)}\right). \qquad (5.25)$$

Здесь вместо сумм вида (5.8) записаны матричные произведения векторов сил и моментов сил инерции слева на транспонированные структурные матрицы - *геометрическую* - сил инерции $\mathbf{W}_{\Phi_i} = \left[\frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}}\right]$ и *дифференциальную* - моментов сил инерции $\mathbf{W}_{M_i} = \left[\frac{\partial \vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]$, определяемых аналитическим дифференцированием геометрических и кинематических структур по обобщенным координатам и обобщенным скоростям. Аналогично, введем геометрическую силовую структурную матрицу $\mathbf{W}_P = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{q}}$, где $\boldsymbol{\rho}$ - вектор координат силовых элементов модели, а также вектор их характеристик $\mathbf{P}$. Сложим обобщенные силы инерции всех тел (5.25), и приравняем полученное выражение обобщенным силам активных сил системы, получим уравнения движения голономной механической системы в обобщенных координатах (5.9)

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{\mathbf{W}_{\Phi_i}^T m_i \vec{a}_{C_i} + \mathbf{W}_{M_i}^T \left(\left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\varepsilon}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\omega}_i^{(i)}\right)\right\} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P} . \qquad (5.26)$$

Для плоских движений $\vec{\omega}_i^{(i)} \times \left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\omega}_i^{(i)} \equiv 0$, поэтому (5.26) можно переписать в виде

$$\mathbf{W}_J^T [\mathbf{J}] \mathbf{W}_J \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P} ,$$

где $\mathbf{W}_J = \begin{bmatrix} \cdot & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \mathbf{W}_{\Phi_i} & 0 & & \\ & & 0 & \mathbf{W}_{M_i} & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cdot & & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & & \\ & & m_i & & & & & & \\ & & & m_i & & & & & \\ & & & & m_i & & & & \\ & & & & & J_{i\xi} & & & \\ & & & & & & J_{i\eta} & & \\ & & & & & & & J_{i\zeta} & & \\ & & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & & \cdot \end{bmatrix}$$ - объединенная структурная

матрица инерции, диагональные элементы которой содержат массы и моменты инерции тел.

Надо иметь в виду, что кинематические параметры i–го тела в (5.26) можно определить также по характеристикам и координатам инерционных элементов. Запишем для стационарной системы, чтобы избежать излишней громоздкости выкладок

$$\vec{r}_{C_i} = \vec{r}_{C_i}(\mathbf{q}), \quad \vec{v}_{C_i} = \dot{\vec{r}}_{C_i} = \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^{u}_{\vec{R}_i} \dot{\mathbf{q}} \qquad \vec{a}_{C_i} = \mathbf{W}_{\Phi_i} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \vec{v}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.27)$$

$$\vec{\omega}_i^{(i)} = \vec{\omega}_i^{(i)}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}), \qquad \vec{\varepsilon}_i^{(i)} = \mathbf{W}_{M_i} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.28)$$

Несмотря на использование в записи (5.26) векторов, эти уравнения строятся только на использовании скалярных величин – характеристик и координат инерционных и силовых элементов.

Эти уравнения совпадают с уравнениями Лагранжа 2 рода, так как составлены в обобщенных координатах и вытекают из общего уравнения механики. Однако – более универсальны, так как легко преобразуются к уравнениям в квазикоординатах, совпадающим с уравнениями Эйлера – Лагранжа для голономных систем и с уравнениями Аппеля для неголономных систем [8].

Выразим обобщенные скорости через квазискорости линейным преобразованием с квадратной матрицей $\mathbf{G}$. Здесь учет нестационарности связей не ведет к громоздким выкладкам, поэтому запишем

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q},t)\dot{\boldsymbol{\pi}} + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q},t). \tag{5.29}$$

Это ведет к линейной зависимости между вариациями обобщенных координат и квазикоординат

$$\delta\mathbf{q} = \mathbf{G}(\mathbf{q},t)\delta\boldsymbol{\pi}. \tag{5.30}$$

Пользуясь выражением обобщенных активных сил и сил инерции (5.26) запишем формулу для виртуальной работы этих сил

$$\delta A^u + \delta A^a = \delta\mathbf{q}^T\left(\mathbf{Q}^a + \mathbf{Q}^j\right) = \delta\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{G}^T\left[\mathbf{W}_P^T\mathbf{P} - \sum_{i=1}^{n}\left\{\mathbf{W}_{\Phi_i}^T m_i\vec{a}_{C_i} + \mathbf{W}_{M_i}^T\left(\left[\vec{J}_i\right]\vec{\varepsilon}_i + \left[\vec{J}_i\right]\vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i\right)\right\}\right] =$$

$$= \delta\boldsymbol{\pi}^T\left[\tilde{\mathbf{W}}_P^T\mathbf{P} - \sum_{i=1}^{n}\left\{\tilde{\mathbf{W}}_{\Phi_i}^T m_i\vec{a}_{C_i} + \tilde{\mathbf{W}}_{M_i}^T\left(\left[\vec{J}_i\right]\vec{\varepsilon}_i + \left[\vec{J}_i\right]\vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i\right)\right\}\right] = 0.$$

Так как вариации $\delta\boldsymbol{\pi}$ независимы, то из последнего выражения следует

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\tilde{\mathbf{W}}_{\Phi_i}^T m_i\vec{a}_{Ci} + \tilde{\mathbf{W}}_{M_i}^T\left(\left[\vec{J}_i\right]\vec{\varepsilon}_i + \left[\vec{J}_i\right]\vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i\right)\right\} = \tilde{\mathbf{W}}_P^T\mathbf{P}. \tag{5.31}$$

Следует иметь в виду, кинематические параметры, входящие в (5.31) определяются формулами

$$\vec{a}_{Ci} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_{C_i}}{\partial\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial\vec{r}_{C_i}}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}\left\{\mathbf{W}_{\Phi_i}\left[\mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\pi}} + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q},t)\right] + \frac{\partial\vec{r}_{C_i}}{\partial t}\right\} = \tilde{\mathbf{W}}_{\Phi_i}\ddot{\boldsymbol{\pi}} + \ldots \tag{5.32}$$

$$\vec{\omega}_i^{(i)} = \vec{\omega}_i^{(i)}(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t) = \vec{\omega}_i^{(i)}(\mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\pi}},\mathbf{q},t), \tag{5.33}$$

$$\vec{\varepsilon}_i^{(i)} = \frac{\partial\vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\ddot{\mathbf{q}} + \ldots = \mathbf{W}_{M_i}\mathbf{G}\ddot{\boldsymbol{\pi}} + \ldots = \tilde{\mathbf{W}}_{M_i}\ddot{\boldsymbol{\pi}} + \ldots . \tag{5.31}$$

Можно преобразовать произведения матриц, входящие в эти выражения, пользуясь первым тождеством Лагранжа

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{q}}\right] = \left[\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right], \quad \left[\frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}}\right] = \left[\frac{\partial \dot{\vec{r}}_{C_i}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right].$$

Получим

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{W}}_P &= \left[\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{q}}\right]\mathbf{G} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{q}}\right]\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right] = \left[\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right] = \left[\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right] \\
\tilde{\mathbf{W}}_{\Phi_i} &= \left[\frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}}\right]\mathbf{G} = \left[\frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}}\right]\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right] = \left[\frac{\partial \dot{\vec{r}}_{C_i}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right] = \left[\frac{\partial \dot{\vec{r}}_{C_i}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right] \\
\tilde{\mathbf{W}}_{M_i} &= \left[\frac{\partial \vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]\mathbf{G} = \left[\frac{\partial \vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right] = \left[\frac{\partial \vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right]
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Формулы (5.32)-(5.35) говорят о том, что матрицы с тильдой, входящие в (5.31), есть дифференциальные структурные матрицы по квазискоростям и могут вычисляться либо с помощью произведения соответствующих структурных матриц, вычисленным по обобщенным координатам и обобщенным скоростям, справа на матрицу $\mathbf{G}$, либо прямым дифференцированием по квазискоростям кинематических структур $\dot{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\pi}})$, $\dot{\vec{r}}_{C_i}(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\pi}})$, $\vec{\omega}_i^{(i)}(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\pi}})$, если они заданы в исходных данных.

Похожий результат получается для неголономных систем. В этом случае следует ввести в рассмотрение уравнения неголономных связей. Допустим сначала, что в эти уравнения входят только обобщенные координаты и скорости вида

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\,\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}, t) = 0\,, \tag{5.36}$$

Линейные уравнения, задающие неголономные связи, позволяют выразить $k = s - l$ зависимых обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}_1$ через l независимых $\dot{\mathbf{q}}_2$

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{B}(\mathbf{q}, t)\,\dot{\mathbf{q}}_2 + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{q}, t)\,. \tag{5.37}$$

Примем в качестве квазискоростей независимые обобщенные скорости $\dot{\boldsymbol{\pi}} = \dot{\mathbf{q}}_2$, тогда получим выражение для обобщенных скоростей через квазискорости, аналогичное формуле (5.31):

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_2 + \boldsymbol{\beta} \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_2 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}_2 + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\pi}} + \boldsymbol{\gamma}\,.$$

Различие только в том, что квазискоростей из-за наличия связей (5.36) меньше, чем обобщенных скоростей или квазискоростей для голономной системы (см. (29)). Тем не менее, проделаем выкладки, аналогичные (5.30) – (5.35). Получим уравнения движения в форме (5.31) по форме и по алгоритму получения, совпадающие с уравнениями в обобщенных координатах и скоростях (5.26). Отличие состоит в том, что в случае неголономной системы к этим уравнениям следует добавить еще уравнения связей в форме (5.37).

Рассмотрим алгоритм вывода уравнений движения (5.26), (5.31). Пусть для системы с s степенями свободы заданы инерционные и силовые элементы механической модели. Тогда:

а) выделением независимых переменных в выражениях структур дискретных элементов (5.27), (5.28) определяются обобщенные координаты $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_s\}$, обобщенные скорости $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s\}$ или квазискорости $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l\}$ модели;

б) аналитическим дифференцированием координат и скоростей инерционных элементов и «тел» определяются составляющие ускорений $\ddot{\vec{r}}_{C_i}$, $\vec{\varepsilon}_i^{(i)}$, ненулевые элементы структурных матриц $\mathbf{W}^u_{\Phi_i}$, $\mathbf{W}^u_{M_i}$, (или $\tilde{\mathbf{W}}^u_{\Phi_i}$, $\tilde{\mathbf{W}}^u_{M_i}$);

в) аналитическим дифференцированием структур силовых элементов определяются ненулевые элементы структурной матрицы активных сил $\mathbf{W}_P$ (соответственно, $\tilde{\mathbf{W}}_P$);

г) аналитическими вычислениями строится левая и правая части векторно-матричной формы уравнений движения (5.26), (5.31);

д) уравнения движения в аналитической форме окончательно формируются и запоминаются после раскрытия векторно-матричных операций в (5.26), (5.31).

Пример. Рассмотрим (рис. 5.2) плоский двухзвенный манипулятор ([12], с.117) с обобщенными координатами: θ_1, θ_2 – соответственно абсолютный угол относительного поворота первого звена («плеча») и относительный угол поворота второго звена («локтя»).

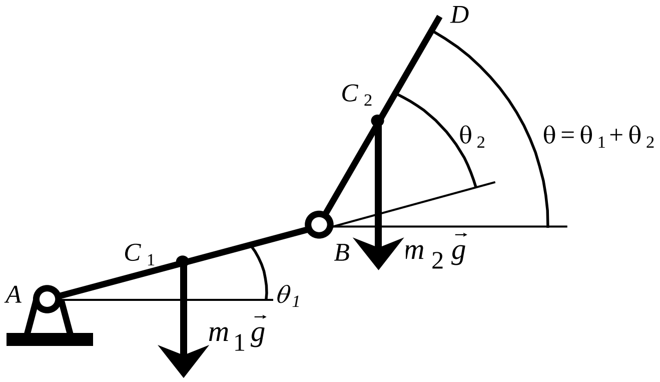

Рис. 5.2

Зададим два твердых тела – «плечо» *AB* и «локоть» *BD*. Инерционная характеристика «плеча» будет $m_1 l^2/3$ (момент инерции относительно оси вращения *A*), координата – угол поворота θ_1. Инерционные характеристики «локтя» – масса m_2 и центральный осевой момент инерции $m_2 l^2/12$, координаты – абсцисса и ордината центра масс $x_{C_2} = l(\cos\theta_1 + 0{,}5\cos\theta)$, $y_{C_2} = l(\sin\theta_1 + 0{,}5\sin\theta)$ и угол поворота $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

Зададим силовые элементы. Для сил тяжести: «плечо» – характеристика $-m_1 g$ и координата y_{C_1}, структура $y_{C_1} = 0{,}5 l \sin\theta_1$, «локоть» - характеристика $-m_2 g$ координата y_{C_2}, структура $y_{C_2} = l(\cos\theta_1 + 0{,}5\cos\theta)$. Для активных моментов, приложенных к звеньям –характеристики $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ и координаты θ_1, θ_2, соответственно.

Следуя алгоритму вывода уравнений движения, найдем структурные матрицы:

$$\mathbf{W}_I=\frac{\partial\{\theta_1\quad\theta\quad x_{C_2}\quad y_{C_2}\}}{\partial\{\theta_1\quad\theta_2\}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ -l(\sin\theta_1+0{,}5\sin\theta) & l(\cos\theta_1+0{,}5\cos\theta)\\ -0{,}5l\sin\theta & 0{,}5l\cos\theta\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{W}_P=\frac{\partial\{y_{C_1}\quad y_{C_2}\quad\theta_1\quad\theta_2\}}{\partial\{\theta_1\quad\theta_2\}}=\begin{bmatrix}0{,}5l\cos\theta_1 & 0\\ l(\cos\theta_1+0{,}5\cos\theta) & 0{,}5l\cos\theta\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Запишем уравнения движения в векторно-матричном виде

$$\mathbf{W}_I^T\begin{bmatrix}m_1l^2/3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & m_2l^2/12 & 0 & 0\\ 0 & 0 & m_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot\theta_1\\ \ddot\theta\\ \ddot x_{C_2}\\ \ddot y_{C_2}\end{bmatrix}-\mathbf{W}_P^T\begin{bmatrix}-m_1g\\ -m_2g\\ \tau_1(t)\\ \tau_2(t)\end{bmatrix}=0\ ,$$

где

$$\ddot x_{C_2}=-l\left\{(\sin\theta_1+0{,}5\sin\theta)\ddot\theta_1+(\cos\theta_1+0{,}5\cos\theta)\dot\theta_1^2+0{,}5\dot\theta_1\dot\theta_2\cos\theta+0{,}5\left(\ddot\theta_2\sin\theta+\dot\theta_2^2\cos\theta\right)\right\},$$

$$\ddot y_{C_2}=l\left\{(\cos\theta_1+0{,}5\cos\theta)\ddot\theta_1+(\sin\theta_1-0{,}5\sin\theta)\dot\theta_1-0{,}5\dot\theta_1\dot\theta_2\sin\theta+0{,}5\left(\ddot\theta_2\cos\theta-\dot\theta_2^2\sin\theta\right)\right\}.$$

После раскрытия векторно-матричных операций получим уравнения движения в форме, приведенной в [12, с.143].

4. Составление дифференциальных уравнений свободных и вынужденных колебаний механических систем

Основой составления дифференциальных уравнений свободных и вынужденных колебаний механических систем служат уравнения (5.26). Среди действующих сил в этом случае целесообразно выделить *линейные упругие силы*, пропорциональные деформациям упругих тел и *линейные диссипативные силы*, пропорциональные скоростям перемещений и деформаций звеньев модели. Кроме них могут также действовать силы возбуждения вынужденных колебаний, в общем случае не периодические.

Аналогично тому, как кинетическая энергия есть полная характеристика инерционных свойств голономной механической системы, характеристикой ее упругих свойств является потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} C_i \gamma_i^2 ,$$

где r – число простых упругих деформаций системе; $C_1, C_2, ..., C_r$ – коэффициенты жесткости упругих тел, соответствующие этим деформациям; $\gamma_1(q_1, q_2, ..., q_s)$, $\gamma_2(q_1, q_2, ..., q_s)$, …, $\gamma_r(q_1, q_2, ..., q_s)$ - функциональные зависимости указанных деформаций от обобщенных координат системы. Поэтому логично задавать ***упругую структуру*** линейных сил упругости системы ***упругими элементами***, описывающими одну простую деформацию, включающими ***имя***, ***характеристику***, ***координату*** и ***структуру***. В качестве характеристик здесь выступают коэффициенты жесткости, координат – деформации, структур – выражения последних через обобщенные координаты.

Обозначим: $C_1, C_2, ..., C_r$ – характеристики упругих элементов (коэффициенты жесткости), где r – число упругих элементов, а $\gamma_1(q_1, q_2, ..., q_s)$, $\gamma_2(q_1, q_2, ..., q_s)$, …, $\gamma_r(q_1, q_2, ..., q_s)$ - их координаты и структуры.

Тогда виртуальная работа сил упругости будет

$$\delta A^e = \sum_{i=1}^{r} \delta A^e_{F_i} = -\sum_{i=1}^{r} C_i \gamma_i \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \gamma_i}{\partial q_k}\delta q_k = -\sum_{k=1}^{s} \delta q_k \sum_{i=1}^{r} C_i \gamma_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial q_k},$$

а обобщенная сила

$$Q_k^e = -\sum_{i=1}^{r} C_i \gamma_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial q_k} \qquad (5.38)$$

Аналогично, в качестве полной характеристики линейных диссипативных сил в системе выступает функция Рэлея

$$R = \sum_{i=1}^{b} D_i \dot{\beta}_i^2 ,$$

где b – число диссипативных элементов; $D_1, D_2, ..., D_b$ - коэффициенты диссипации; $\dot{\beta}_1(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s)$, $\dot{\beta}_2(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s)$, $\dots$, $\dot{\beta}_b(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s)$ – скорости по соответствующим локальным координатам. Поэтому логично задавать и ***диссипативную структуру*** линейных сил вязкого трения в системе ***диссипативными элементами***, описывающими линейное рассеяние энергии на одном каком-то простом движении – поступательном или вращательном, включающими ***имя***, ***характеристику, координату*** и ***структуру***. В качестве характеристик здесь выступают коэффициенты демпфирования D_i, координат – простые перемещения, на которых проявляется такое трение, структур – выражения координат таких движений через обобщенные координаты.

Тогда виртуальная работа сил вязкого трения будет

$$\delta A^d = \sum_{i=1}^{b} \delta A^d_{R_i} = Q^d_k = -\sum_{i=1}^{b} D_i \dot{\beta}_i \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \beta_i}{\partial q_k} \delta q_k = -\sum_{k=1}^{s} \delta q_k \sum_{i=1}^{N} D_i \dot{\beta}_i \frac{\partial \beta_i}{\partial q_k},$$

а обобщенная сила

$$Q^d_k = -\sum_{i=1}^{b} D_i \dot{\beta}_i \frac{\partial \beta_i}{\partial q_k}. \qquad (5.39)$$

Произведение характеристики упругого элемента на его координату дает характеристику ***силового элемента***, соответствующего этому упругому, определяющему силу (момент пары сил) упругости. Тогда виртуальная работа упругого элемента определится умножением его характеристики, взятой с обратным знаком, на вариацию его координаты (см. (5.38)).

Произведение характеристики диссипативного элемента на первую производную по времени его координаты (структуры) дает характеристику

силового элемента, соответствующего такому диссипативному, определяющего силу (момент пары сил) диссипации. Тогда виртуальная работа диссипативного элемента определится умножением характеристики такого силового элемента, взятой с обратным знаком, на вариацию его координаты (см. (5.39)).

Уравнения (5.9) в этом случае примут вид

$$-Q_k^j - Q_k^d - Q_k^e = Q_k(t), \qquad k = 1,2,\ldots, s\ , \tag{5.40}$$

где $Q_k(t)$ – обобщенная сила возбуждения. После подстановки в (5.40) формул (5.25), (5.38), (5.39), получим в матричном виде

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathbf{W}_{\Phi_i}^T m_i \vec{a}_{C_i} + \mathbf{W}_{M_i}^T \left(\left[\vec{J}_i \right] \cdot \vec{\varepsilon}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \left[\vec{J}_i \right] \cdot \vec{\omega}_i^{(i)} \right) \right\} + \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P}$$

Полученное выражение полностью поддается автоматическому компьютерному построению.

В случае малых колебаний системы относительно положения устойчивого равновесия можно пренебречь вторым слагаемым в круглых скобках, а также принять (см. (5.27), (5.28))

$$\vec{a}_{C_i} = \mathbf{W}_{\Phi_i} \ddot{\mathbf{q}}\ ,\ \vec{\varepsilon}_i^{(i)} = \mathbf{W}_{M_i} \ddot{\mathbf{q}}\ ,\ \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{W}_D \dot{\mathbf{q}}\ ,\ \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{W}_C \mathbf{q}$$

Поэтому, окончательно, получим

$$\mathbf{W}_J^T [\mathbf{J}] \mathbf{W}_J \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \mathbf{W}_D \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \mathbf{W}_C \mathbf{q} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P}$$

или

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{F}(t)\ , \tag{5.41}$$

где $\mathbf{A}$ - матрица инерции, $\mathbf{B}$ - матрица демпфирования, $\mathbf{C}$ - матрица упругости, $\mathbf{F}(t)$ - вектор сил возбуждения. Полученное матричное уравнение (5.41) решается традиционными методами линейной алгебры.

При наличии в системе нелинейных упругих и диссипативных сил они могут быть представлены в виде обычных силовых элементов.

Комплекс КИДИМ позволяет построить скелетные кривые и произвести расчеты переходных процессов и установившихся режимов вынужденных нелинейных колебаний.

Выводы.

Применение при изучении теоретической механики аналитического подхода и компьютерных средств позволяет в практической части курса отказаться не только от архаичных графических методов, но и от графо-аналитических. Для обеспечения данного курса в учебные планы введен компьютерный практикум, виртуальные лабораторные работы на ПК, изданы соответствующие методические пособия [1]. В дополнение к аудиторному курсу нами разработан аналогичный дистанционный курс, установленный на сайте НТУ «ХПИ» [13]. Он ориентируют студентов на применение ПК и сети INTERNET при изучении теоретической механики.

Опыт применения в учебном процессе комплекса КИДИМ:

- существенно расширяет возможности для творческого освоения студентами программного курса теоретической механики на уровне современных требований,
- значительно эффективнее закрепляет у студентов практические навыки в составлении механических и математических моделей механизмов,
- дает реальные возможности в индивидуальном подходе к обучению, и в наполнении учебного курса более содержательными, разнообразными и сложными прикладными примерами, чем при традиционных видах обучения,
- дает студентам дополнительную практику работы на ПК,
- повышает интерес у студентов, начиная с младших курсов, к изучению теоретических основ инженерных наук и компьютерного моделирования.

Все вышеизложенное позволяет говорить о возможности использования программного комплекса КИДИМ при подготовке инженеров-механиков и в других дисциплинах, таких как теория колебаний, динамика машин, теория механизмов и машин и многих специальных предметах, что обеспечит непрерывность процесса обучения, даст возможность заинтересованным студентам глубже освоить изучаемый материал и применять в своей дальнейшей инженерной и научной деятельности современные методы и средства проведения расчетов, в том числе аналитические.

С появлением программных комплексов такого плана как СКА КИДИМ, можно сказать, что теоретическая механика по-настоящему возвращается к истинно аналитическим методам, заложенным в механику Эйлером, д’Аламбером, Лагранжем и развивавшимся Пуассоном, Гамильтоном, Остроградским, Якоби, Герцем, Аппелем, Чебышёвым, Чаплыгиным, Сусловым, Четаевым и др. Именно этот подход к изучению механики проводил в нашем институте А. М. Ляпунов.

Литература

1. Андреев Ю. М. Практикум по теоретической и аналитической механике с применением ПЭВМ. — Изд. 2-е, перераб. и доп. / Ю. М. Андреев, Е. И. Дружинин, А. А. Ларин; Под ред. О. К. Морачковского. — Х.: НТУ «ХПИ», 2004. — 100 с.

2. Митин В. Н. Структурные матрицы цепных вибрационных систем / В. Н. Митин, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. — 1973. — Вып. 17. — С. 3–7. (*)

3. Митин В. Н. Структуры дискретных механических моделей конструкций / В. Н. Митин, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. — 1982. — Вып. 35. — С. 3–6. (*)

4. Ларин А. А. Силовой анализ механизмов с применением систем аналитических преобразований на ЭВМ / А. А. Ларин // Теория механизмов и машин. — К.: НМК ВО, 1993. — С. 64–72.

5. Андрєєв Ю. М. Система комп’ютерної алгебри для досліджень механіки машин / Ю. М. Андрєєв, А. О. Ларін, О. К. Морачковський // Машинознавство. — 2005. — № 7 (95). — С. 3–8. (*)

6. Андреев Ю. М. Компьютерное моделирование задач механики голономных систем твердых тел со стационарными и нестационарными связями / Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. — 1993. — Вып. 53. — С. 96–102. (*)

7. Андреев Ю. М. Компьютерное построение дифференциальных уравнений движения неголономных систем / Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. — 1993. — Вып. 54. — С. 93–98. (*)

8. Андреев Ю. М. О динамике голономных систем твердых тел / Ю. М. Андреев, О. К. Морачковский // Прикл. механика. — 2005. — Т. 41, № 7. — С. 130–138. (*)

9. Андреев Ю. М. Компьютерное моделирование неголономных систем твердых тел на основе принципа д'Аламбера – Лагранжа / Ю. М. Андреев, О. К. Морачковский // Прикл. механика. — 2006. — Т. 43, № 9. — С. 106–115. (*)

10. Павловський М. А. Теоретична механіка. Підручник / М. А. Павловський. — К.: Техніка, 2002. — 512 с. (*)

11. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. / П. Аппель. — М.: Физматгиз, 1960. 245 с.

12. Фу К., Робототехника / Фу К., Гонсалес Р., Ли К. — М.: Мир, 1989. — 624 с. (*)

13. Андреев Ю.М. Практикум по теоретической механике на основе систем компьютерной алгебры ПК. [Электронный ресурс]: Дистанционный курс. — Электрон. дан. (1175 файлов). / Ю. М. Андреев. — Х.: НТУ «ХПИ», 2001 – 2007.